UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CURSO DE CIÊNCIAS ATUARIAIS

DISCIPLINA GESTÃO DE RISCOS E INVESTIMENTOS 1

PROF VITOR BORGES MONTEIRO

VAR – Value At R

O VAR tem suas raízes nos famigerados desastres financeiros do início dos anos 1990 que abalaram instituições como Condado de Orange, Barings, e tantos outros. A lição comum a esses desastres é que bilhões de dólares podem ser perdidos em decorrência de ineficientes supervisão e administração de risco financeiro. Estimulados a agir, as instituições financeiras e os reguladores se voltaram para o VAR, um método de fácil compreensão para o cálculo e o controle dos riscos de mercado.

O que é o VAR? O VAR é um método de mensuração de risco que utiliza técnicas estatísticas, comumente usadas em outras áreas técnicas. Formalmente, o VAR mede a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e dentro de determinado nível de confiança. Com base em fundamentos científicos, fornece aos usuários uma medida concisa do risco de mercado. Por exemplo, um banco poderá informar que o VAR diário de sua carteira é de R$ 35 milhões, ao nível de confiança de 99%, isto é, há apenas uma oportunidade em 100, sob condições normais de mercado, de ocorrência de prejuízo superior a R$ 35 milhões. Esse único valor resume a exposição do banco ao risco de mercado, assim como a probabilidade de uma oscilação adversa. Além disso, ele mede o risco utilizando a mesma unidade de moeda que o resultado do banco, ou seja, reais. Assim, acionistas e administradores podem decidir se esse nível de risco é aceitável. Caso não o seja, o processo que conduziu ao cálculo do VAR pode ser usado para a decisão de onde reduzir o risco.

O *VaR* sintetiza a perda máxima esperada, medida em valores monetários, dentro de determinado intervalo de tempo e dada uma probabilidade de ocorrência. Portanto, devemos sempre associar esta medida a:

1. uma moeda (valor monetário);
2. um intervalo de tempo (quando devemos notar esta perda); e
3. uma probabilidade (com que freqüência esta perda será notada).

O *VaR* de uma posição comprada em 1 milhão de reais em ações de Petrobras pode ser de R$ 60 mil para um dia com uma probabilidade de 98%, ou de R$ 45 mil para um dia com uma probabilidade de 94%. Ou até de R$ 90 mil para cinco dias com uma probabilidade de 95%. Podemos denotar esta medida de risco de várias maneiras, dependendo de nossas necessidades.

Note que o tamanho da carteira, ou valor do ativo, é muito importante. Vamos supor que determinada carteira contenha apenas ações, e que o *VaR* de um dia para um intervalo de confiança de 95% foi de R$ 3.250,00. Este número é grande ou pequeno? Se essa carteira possui apenas uma ação no valor de R$ 100 mil, podemos dizer que ele é muito grande. Entretanto, se a carteira é composta por muitas ações em um montante de R$ 1 milhão, o *VaR* é pequeno. O risco, medido dessa forma, está diretamente ligado ao valor da carteira ou montante do ativo que possuímos.

Feitas essas observações preliminares, definiremos o *VaR* de uma carteira de valor *Xt*, no período *t*, como:

,

onde *α* é o nível de significância (ou (1 – *α*)é o nível de confiança) adotado,  é a variação no valor da carteira de preço *Xt* e *VaR* é o valor em risco para o horizonte de tempo *t*. A notação *P*( ) indica a probabilidade de um evento, então  significa que a probabilidade da variação da carteira é menor ou igual ao *VaR* é igual a *α*.

# 6.1. VAR – modelos paramétricos

Como podemos notar, o conceito do *VaR* não é difícil, não emprega nada de estranho, e seu resultado é em unidades monetárias. Entretanto, medi-lo (ou melhor, estimá-lo) é outro problema. Quanto mais complexos forem os instrumentos que compõem a carteira, mais difícil será medir seu risco. Medir o risco de uma ação é relativamente fácil; já o de sua opção de compra é um problema mais complicado.

Podemos dividir os modelos para o cálculo do *VaR* em dois grandes grupos: modelos paramétricos e não-paramétricos. Nessa seção estudaremos os paramétricos.

O método paramétrico consiste em atribuir uma distribuição de probabilidade conhecida aos retornos dos ativos que compõem a carteira e, a partir daí, empregando as propriedades dessa distribuição estimar o *VaR*. Uma das distribuições mais empregadas para esse fim é a distribuição normal ou Gaussiana. Ela serve como uma excelente aproximação para uma grande classe de distribuições que têm enorme importância prática. Portanto, vamos, primeiro, fazer uma breve apresentação sobre a distribuição normal.

Uma variável tem distribuição normal quando o aspecto de sua densidade de probabilidade é uma curva em forma de sino semelhante às da Figura 1. A maior parte dos dados encontra-se em torno da média. À medida que nos afastamos dela, tanto para mais como para menos, a probabilidade de ocorrência de um resultado diminui de uma forma simétrica, isto é, a distribuição é uma curva simétrica em relação a sua média. A equação dessa curva é dada por

.

Não se assuste com essa fórmula, pois você não precisará utilizá-la. Ela só é útil para os matemáticos em suas considerações teóricas.



*X*

Y

**Figura *1****– Distribuição normal – influência do desvio-padrão.*

A distribuição normal com média zero e variância unitária, isto é *Z* = *N*(0, 1), é chamada de normal-padrão. A função de distribuição acumulada normal-padrão, isto é, a probabilidade de uma normal-padrão ser menor ou igual a *x,* onde *x* é um número real qualquer, será indicada por .

Para determinar a probabilidade de *X* estar, por exemplo, entre dois valores *a* e *b*, *a* < *b*, temos de integrar a fdp de *X* de *a* até *b*, ou seja, temos de determinar a área sob a curva normal situada entre *a* e *b*. Essa integral não pode ser calculada pelos caminhos comuns, necessitando de métodos de integração numérica. Uma forma alternativa consiste em usar tabelas de distribuição normal. Essas tabelas contêm os valores das probabilidades de uma distribuição normal-padrão *Z* ser menor ou igual que um dado *z*. A Figura 2 apresenta uma tabela de distribuição normal.

|  |  |
| --- | --- |
| *z* | *P*[*Z* < *z*] |
| -3 | 0,00135 |
| -2 | 0,02275 |
| -1 | 0,15865 |
| 0 | 0,5 |

**Figura 2** – *Tabela de distribuição normal*.

É possível demonstrar que, se *X* tem distribuição normal , então tem distribuição normal-padrão. Usando esse fato e a tabela de distribuição normal-padrão, podemos calcular probabilidades para qualquer distribuição normal.).

## 6.2. var DE um único ativo

Para simplificar a análise, imaginemos que a nossa carteira seja composta por um único ativo (uma ação com boa liquidez). Primeiramente, deveremos modelar estatisticamente o comportamento do preço da ação, ou seja, deveremos determinar a distribuição de probabilidade do seu preço. A experiência é simples: listar os desvios (acréscimos ou decréscimos de preço) verificados em um período fixo de dias, e desenhar um histograma, para começar. Anota-se o preço do ativo hoje, amanhã, depois e verifica-se quanto o preço se desviou de um dia para outro. A Figura 3 apresenta o histograma dos retornos de Petrobras PN no período de 13/12/2001 a 13/12/2002.



**Figura 1** – *Histograma dos retornos de Petrobras PN.*

Observando a Figura 3, a primeira idéia que nos parece adequada é admitir que as variações percentuais se enquadram em uma distribuição normal, obtemos o *VaR* de um dia do ativo que é:

. (1)

Onde:

*X*0= valor presente ou marcado a mercado investido no ativo;

 = constante relativa ao número de desvios-padrão para o nível de confiança desejado, isto é, quantil correspondente a (1 – *α*) de uma distribuição normal-padrão;

 = desvio-padrão ou volatilidade diária do retorno do ativo;

 = retorno esperado de um dia para o ativo.

O valor marcado a mercado de um ativo é o seu valor justo (*fair value*). E o que seria um valor justo? Não há regras ou normas estabelecidas para definir o valor de mercado. Como orientação geral, o valor justo seria o valor que o mercado estaria disposto a negociar para o ativo ou contrato. Se for um título que seja negociado em mercado secundário com boa liquidez, o valor de mercado pode, simplesmente, ser considerado como o valor médio das negociações realizadas no dia ou, ainda, o da última negociação. Se não há boa liquidez, pode-se, por exemplo, avaliar o título através de consultas a mesas de operações de outras instituições financeiras, verificando o preço a que estariam dispostos a fechar uma transação. Em determinados casos, a avaliação a mercado de um contrato pode ser visto como um valor de reposição do mesmo. Supondo um contrato de *swap*, é possível avaliá-lo considerando, como valor justo, o valor de um novo contrato com mesmo vencimento e mesmas condições contratuais. Pode-se, também, avaliar um ativo ou contrato através do cálculo do valor presente do seu fluxo de caixa futuro, descontando seus pagamentos ou recebimentos futuros por taxas de juro de mercado.

A avaliação a mercado é imprescindível para a atividade de mensuração do risco de mercado. De nada adianta calcular determinadas medidas de risco (*VaR*, por exemplo) sobre carteiras que não estejam devidamente avaliadas a mercado. As estimativas de possíveis perdas estariam inteiramente equivocadas.

O sinal negativo no lado direito da Equação 1 aparece, porque estamos considerando a distribuição dos ganhos. Sendo o *VaR* uma medida de perda, corresponde a um ganho negativo. De agora em diante, apresentaremos as fórmulas para cálculo do *VaR* sem o sinal de subtração (-), subentendendo que se trata de uma perda (caso o *VaR* seja positivo, o pior resultado dentro do intervalo de confiança considerado corresponde a um ganho).

Para horizontes de tempo curtos (tipicamente de um dia), o retorno esperado é bem pequeno, podendo ser aproximado para zero, assim a Equação simplifica-se para

. (2)

O *VaR* calculado com a ajuda da Equação 2 é chamado de *VaR* relativo (perda relativa à média). Já o *VaR* determinado pela Equação 1 é denominado de *VaR* absoluto.

O número  depende do nível de confiança (1 - *α*) e é calculado a partir da integração da função densidade de probabilidade da distribuição normal,

, (3)

onde: *N*(0,1) é a função densidade de probabilidade normal com média 0 e desvio-padrão 1.

A Figura 4 apresenta alguns valores de  para os níveis de confiança mais adotados na prática.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1-*α* | 99,5% | 99% | 97,5% | 95% | 90% |
|  | 2,58 | 2,33 | 1,96 | 1,65 | 1,28 |

**Figura 2**– *Valores de z1  para uma distribuição normal.*

Para um horizonte de tempo *t*, diferente de um dia, o *VaR* pode ser obtido de

. (4)

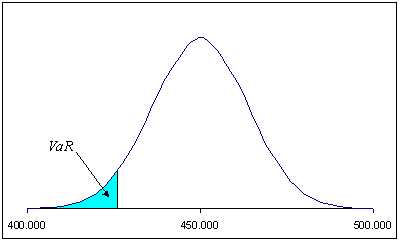
Vejamos um exemplo de cálculo do *VaR* para uma carteira formada por uma única ação. Imagine que hoje fosse o dia 29/05/06 e estivéssemos, ao final desse dia, interessados em calcular o *VaR* de uma posição de 10 mil ações de Petrobras PN para o dia 30/06/06 com um nível de confiança de 95%.

As ações de Petrobras PN são papéis negociados na Bovespa de excelente liquidez. Portanto, marcar a mercado essa carteira (isto é, obter *X*0 para essa carteira) não é problema: basta observar a cotação de fechamento da ação em 29/05/06 e multiplicar pela quantidade de ações na carteira. Para estimar a volatilidade (e também a média) dos retornos de Petrobras PN, podemos utilizar um procedimento conhecido como média móvel simples. Esse método consiste em fixar uma janela temporal e estimar a volatilidade usando como dados amostrais os retornos observados nesse período. Considere que, após analisarmos os retornos das ações da Petrobrás nos últimos 60 dias, obtemos os seguintes valores para desvio-padrão e média, respectivamente: σ= 3,027% e µ = 0,015%. Como , temos

 e



Onde *VaR A* e *VaR R* são, respectivamente, o *VaR* absoluto e relativo. Note que a diferença entre o *VaR* absoluto e o relativo é pequena. Isso em geral acontece, conforme observado anteriormente, porque o retorno médio para horizontes de tempo curtos é pequeno. A Figura 5 ilustra graficamente o *VaR* de Petrobras para um intervalo de confiança de 95%. Como exercício, o leitor pode calcular o *VaR* de um dia para uma posição de 10 milhões de ações da Vale do Rio Doce com um nível de confiança de 95%.



**Figura 3** – *VaR da Petrobras*.

Fizemos a hipótese de que os retornos são distribuídos normalmente. No entanto, essa hipótese apresenta uma imperfeição, pois permite a ocorrência de preços negativos: uma alta de 120% tem a mesma probabilidade de uma baixa de 120% o que implica uma cotação menor que zero para a ação.

A melhor forma de contornar esse problema é supor que os preços tenham a mesma probabilidade de variar para cima e para baixo por um fator. Por exemplo, 1,10. O preço teria iguais probabilidades de subir para 1,10 vezes seu valor (ou seja, aumentar em 10%), ou cair por 1,10 vezes seu valor (ou seja, uma baixa de 9,09%). Uma alta de 200% (três vezes seu valor) teria a mesma probabilidade de uma redução por três (uma baixa de 66,67%).

Por maior que seja um fator, ele jamais levará um preço a ser negativo.Para modelar matematicamente uma distribuição na qual as probabilidades de alta e de baixa por um mesmo fator são iguais, temos de usar uma distribuição log-normal. Como faremos isso? Vamos admitir que a diferença entre o logaritmo natural da cotação da ação em um dia e o logaritmo natural da cotação da ação no dia anterior obedece a uma distribuição normal. Em outras palavras, agora, iremos estudar a diferença  onde *S*0 é preço de fechamento hoje e *S*1 é o preço de fechamento ontem. Essa diferença é chamada de retorno geométrico, em contraste com o retorno aritmético ou simplesmente retorno que é a variação percentual no preço do ativo. O retorno geométrico é o retorno utilizado na teoria de finanças, já o retorno aritmético é empregado em aplicações financeiras práticas.

Se a distribuição da diferença entre o logaritmo dos preços é normal, então uma alta por 1,10 (uma alta de 10%) tem a mesma probabilidade que uma baixa por 1,10 (uma baixa de 9,09%). Isso porque a distância entre o logaritmo de 100 e o de 110 é a mesma que aquela entre o logaritmo de 100 e o de 100/1,10 = 90,90:



Usando uma propriedade bem conhecida dos logaritmos, temos que:



Portanto, o retorno geométrico é igual ao logaritmo natural do retorno aritmético acrescido de uma unidade. Para retornos aritméticos pequenos (menores que 5%), o retorno geométrico e o aritmético são praticamente iguais. Por exemplo, um retorno aritmético igual a 3% equivale a um retorno geométrico de .

Em suma, uma alternativa pode ser obtida partindo-se do pressuposto de que a distribuição de probabilidade do retorno geométrico de um ativo é normal. O documento técnico do banco J. P. Morgan, *RiskMetrics*, que introduziu o conceito de *VaR* ,usa essa abordagem. Assim,



Onde:

*sg* = desvio-padrão do retorno geométrico de um dia;

*mg* = média do retorno geométrico de um dia;

 = representa a função exponencial natural calculada no ponto *x*.

Considerando as seguintes estatísticas: σ*g* = 3,027% e *µg* = - 0,030%. Temos:

 e

.

## 6.3 var de uma carteira

Se tivermos apenas um ativo em nossa carteira, podemos empregar as fórmulas anteriormente apresentadas; entretanto, se nossa carteira possui mais de um ativo, teremos de levar em conta o efeito da correlação entre os ativos. Isto é, teremos de levar em conta se os ativos que compõem a carteira têm um comportamento semelhante (quando um sobe, o outro tende a assumir), oposto (quando um cai, o outro tende a subir) ou se não existe associação entre o comportamento dos ativos (quando um sobe, o outro pode subir ou cair com igual probabilidade). Uma medida do grau de associação entre o retorno de dois ativos é coeficiente de correlação. Supondo que as, temos:

. (6)

Onde:

*VaRc* = *Value at Risk* da carteira;

*VaR*1 = *Value at Risk* do ativo 1 da carteira;

*VaR*2 = *Value at Risk* do ativo 2 da carteira;

*p*12 = coeficiente de correlação entre o ativo 1 e o ativo 2.

Uma forma alternativa de calcular o *VaR* de uma carteira formada por dois ativos consiste em, primeiramente, calcular a variância da carteira utilizando a seguinte expressão:

. (7)

Onde:

*w*1 é participação do ativo 1 na carteira, e *w*2 é participação do ativo 2 na carteira. Por exemplo, se o valor marcado a mercado do ativo 1 na carteira é R$ 600 mil e o do ativo 2 é R$ 400 mil, então *w*1 = 0,6 e *w*2 = 0,4.  é a matriz de pesos dos ativos na carteira;

 é a matriz de covariância da carteira. O parâmetro é a variância do ativo 1,  é a variância do ativo 2 e  é a covariância entre os ativos 1 e 2.

Efetuando o produto matricial no lado direito da Equação 2.9, obtemos:



Em seguida, podemos empregar a Equação 5, sendo *X0* o valor marcado a mercado da carteira e *σ* , a volatilidade da carteira, isto é, *σc*.

Por exemplo, para uma carteira formada por 10 mil ações de Petrobras PN e 10 milhões de ações de Telemar PN no dia 04/12/03, o *VaR* de um dia com um nível de confiança de 95% é obtido do seguinte modo:

,

,

.



Observe que o *VaR* da carteira é menor que a soma dos *VaR* das duas ações (R$ 34.534). Esse fato é conhecido como efeito de diversificação.